

(Fast) Alles über ein wichtiges Thema:

Grenzwerte und Stetigkeit
von Funktionen

Sprünge, Löcher und senkrechte Asymptoten
von Schaubildern

mit 30 Seiten Aufgabenpraxis

Daten Nr. 41010

Stand 28. Juni 2017

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Wichtiges Vorwort

Mit diesem Text habe ich nun eine Form gefunden, mit der ich endlich selbst zufrieden bin.

Der Themenbereich Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen besteht aus sehr vielen Details, man kann immer wieder anders einsteigen und die Abfolge der Unterthemen ist variabel. Zuerst hatte ich daher mehrere kleine Texte, doch dann habe ich mich dazu entschlossen, diesen Aufbau zu verwenden.

Es ist allerdings ein Mammuttext geworden. Daher gibt es ein sehr ausführliches Inhaltsverzeichnis, damit man auch das finden kann, was man sucht. Wer sich beispielsweise nur für **gebrochen rationale Funktionen** (Polstellen usw.) interessiert, findet dies ab Seite 33

Dieses Thema findet man *in kompakter Form* auch im Text 43003.

In vorliegendem Text wird dieser Themenbereich ausführlich besprochen.

Allerdings bestehen die letzten 30 Seiten aus Aufgaben aus der Unterrichtspraxis mit Lösungen.

Diese findet man auch nochmals isoliert im **Text 43005**.

Zum Thema „Zusammengesetzte Funktionen“ gibt es in diesem Text nur 4 Beispiele. Viel mehr findet der Leser im **Text 41011**

Dem Bereich Betragsfunktionen habe ich hier nur 2 Seiten gewidmet, denn dazu gibt es drei eigenständige Texte:

- 43021** Lineare Betragsfunktionen
- 43022** Quadratische Betragsfunktionen
- 43923** Gebrochen rationale Betragsfunktionen

Die große Aufgabensammlung 4105c enthält weiteres Material zum Üben

Noch ein Hinweis für Anfänger

Der erste Abschnitt bringt ein sehr anschauliches Beispiel anhand einer Zauberstunde aus Harry Potters Umfeld. Empfehlenswert zum Verständnis für das, was kommt...

Inhalt

1	Einführungsgeschichte – Eine Zauberstunde in Hogwarts.	6
	<i>Der Zug nach Hogwarts wird so verzaubert, dass eine nicht mehr stetige Bahnstrecke entsteht mit verblüffenden Konsequenzen. Dabei werden verschiedene Möglichkeiten der Unstetigkeit gezeigt, am Ende untermauert durch Funktionsgleichungen.</i>	
2	Information: Dies kann Funktionen und Schaubildern passieren	11
	<i>Mathematische Beschreibung der Stetigkeit. Verschiedene Möglichkeiten von Unstetigkeitsstellen.</i>	
3	Berechnung von Grenzwerten mit Zahlenfolgen	16
3.1	Grenzwerte für $f(x) = -\frac{1}{4}x + 4$, berechnet mit Folgen sehr ausführliche und anschauliche Begründung	16
3.2	Grenzwerte für $f(x) = \frac{1}{16}x^2 - x + 4$, berechnet mit Folgen	19
3.3	Grenzwerte für $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2$, berechnet mit Folgen	19
3.4	Grenzwerte für $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, berechnet mit Folgen	20
3.5	Grenzwerte für $f(x) = \frac{x+8}{x^2+4}$, berechnet mit Folgen	21
3.6	Grenzwerte für $f(x) = e^x$, berechnet mit Folgen	21
3.7	Trainingsaufgaben; Grenzwerte mit Zahlenfolgen berechnen Lösungen	22 23
4	Grenzwertsatz für Funktionen (Information ohne Beweis)	24
4.1	Drei Anwendungsbeispiele	24
4.2	Jede ganzrationale Funktion ist überall stetig <i>Das wird gezeigt an der allgemeinen Funktion 3. Grades.</i>	24
4.3	Jede gebrochen rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig. Drei Funktionsbeispiele zeigen die Beweismethode.	25
4.4	Andere stetige Funktionen	26
5	Grenzwertberechnung bei stetigen Funktionen	27
	<i>Jetzt braucht man die Umkehrung des zuvor Gelernten: „Wenn f stetig ist, dann kann man ihre Grenzwerte als Funktionswerte berechnen!“</i>	
6	Stetigkeit bei zusammengesetzten Funktionen	28
6.1	Vier Beispiele	28
6.2	Betragfunktionen: Drei Beispiele	31

7	Untersuchung der Unstetigkeiten bei gebrochen rationalen Funktionen	33
7.1	Hinführung durch ein sehr anschauliches Beispiel: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$	33
7.2	Sichere Untersuchungsmethode für gebrochen rationale Funktionen <i>Ein wirkungsvolles Ablaufschema zur Erfassung der Besonderheiten.</i>	36
Beispiel 1:	$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (Polstelle / senkrechte Asymptote)	36
Beispiel 2:	$f(x) = \frac{8}{(x-2)^2}$ (Polstelle ohne Vorzeichenwechsel) Polstellenanalyse mit Zahlenfolgen	37
Beispiel 3:	$f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$ (Polstelle ohne Vorzeichenwechsel)	38
Beispiel 4:	$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ (2 Polstellen mit Vorzeichenwechsel)	38
Beispiel 5:	$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$ (Polstelle / senkr. Asymptote, Loch)	39
Beispiel 6:	$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ (punktierte Gerade, Loch)	40
Beispiel 7:	$f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ (Polstelle / senkr. Asymptote, Loch)	40
Beispiel 8:	$f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2+4x+3}$ (Polstelle / senkr. Asymptote, Loch) Polstellenanalyse mit Zahlenfolgen	41
Beispiel 9:	$f(x) = \frac{x^3+5x^2-6x}{x^3+x^2-2x}$ (2 hebbare Definitionslücken und Polstelle)	42
Beispiel 10:	$f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+4}$ (Ausnahme-Polstelle!)	43
Beispiel 11:	$f(x) = \frac{x^2-6}{x^2+4}$ (f ist überall stetig)	44
	6 Schaubilder zu „überall stetigen“ gebrochen rationalen Funktionen	45
Beispiel 12:	$f(x) = \frac{x^4-4x^3+3x^2+4x-2}{4x^4-15x^3+16x^2-3x-2}$ Untersuchung mit CAS.	46
	Methodenübersicht	48
7.2	Untersuchung des Polverhaltens mit einer Vorzeichentabelle	49
	bei $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$ und $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$	
8	Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$	52
8.1	Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ (als Grundlage für andere Untersuchungen)	52
8.2	Ganzrationale Funktionen	52
	Methoden für die vier möglichen Fälle	53
	Übersicht – Merkblatt	54

8.3	Gebrochen rationale Funktionen: Information über die Ergebnisse	55
	Beispiele zum 1. Fall (Grad Z < Grad N)	56
	$f(x) = \frac{4}{x-2}, \quad f(x) = \frac{2x}{x^2-4}, \quad f(x) = \frac{8}{x^2-4}, \quad f(x) = \frac{8x+16}{(x-2)^2},$	
	Beispiele zum 2. Fall (Grad Z = Grad N)	57
	$f(x) = \frac{2x+4}{x}, \quad f(x) = \frac{3x^2-27}{x^2}, \quad f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \quad f(x) = \frac{2x^2}{(x-2)^2}, \quad f(x) = \frac{4x^2-12}{x^2+4}$	
	Beispiele zum 3. Fall (Grad Z = Grad N + 1)	59
	Im Nenner <u>ohne</u> Summe: $f(x) = \frac{x^2+4}{x}, \quad f(x) = \frac{x^2-8}{2x}, \quad f(x) = \frac{x^3-x^2-12}{x^2}$	59
	Im Nenner <u>mit</u> Summe: $f(x) = \frac{x^2-x+4}{2x-2}, \quad f(x) = \frac{-x^2+12}{2x+4}$	60
	Beispiele zum 4. Fall (Grad Z = Grad N + 2)	61
	$f(x) = \frac{x^3+2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{x^2+4}{2x^2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{x^2}, \quad f(x) = \frac{16-x^4}{x^2} = -x^2 + \frac{16}{x^2}$	
8.4	Exponentialfunktionen	62
	$f(x) = e^x, \quad f(x) = e^{-x}, \quad f(x) = e^x - 2, \quad f(x) = \dots - e^{1-x}$	

9 Aufgabenpraxis im Unterricht und in Tests 63

1. Aufgabentyp:	An Hand von Schaubildern Grenzwerte und Stetigkeit bestimmen	63	L: 70
2. Aufgabentyp:	Grenzwerte berechnen	64	L: 71
3. Aufgabentyp:	Stetigkeit überprüfen: Wo ist f stetig?	65	L: 74
4. Aufgabentyp:	Stetigkeit bei zusammengesetzten Funktionen herstellen	65	L: 75
5. Aufgabentyp:	Kurven nach Stellen- und Grenzwert-Vorgaben skizzieren	66	L: 77
6. Aufgabentyp:	Gebrochen rationale Funktionen untersuchen (ohne Ableitungen)	69	L.: 81